ÁREAS Y VOLÚMENES II

Ejercicio nº 1.-

Los puntos $P(0, 2, 0)$ y $Q(2, 1, -1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S, pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.

a) Determina las coordenadas de S.
b) Calcula el área del triángulo PQS.

Ejercicio nº 2.-

Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes de coordenadas y el plano:

$2x - y + z - 4 = 0$

Ejercicio nº 3.-

Considera el plano $2x - y + z - 4 = 0$.

a) Halla los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas.
b) Calcula el área del triángulo formado por estos tres puntos.

Ejercicio nº 4.-

Calcula el volumen de un cubo que tiene uno de sus lados sobre la recta $r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$ y otro sobre la recta $s: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-2}$.

Ejercicio nº 5.-

a) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(3, -1, -1)$ y es perpendicular a $\vec{v}(1, 1, 1)$.
b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes de coordenadas y el plano anterior.

Ejercicio nº 6.-

Considera los puntos $A(3, 0, 2)$, $B(4, -1, 3)$ y $C(2, 2, 1)$.

a) Prueba que son los vértices de un triángulo.
b) Calcula el área de dicho triángulo.

Ejercicio nº 7.-

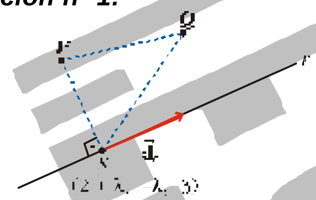
$A(0, 1, 2)$, $B(0, 2, 3)$ y $C(0, 2, 5)$ son tres vértices de un tetraedro. El cuarto vértice, D, está sobre la recta:

$r: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

Halla las coordenadas de D para que el volumen del ortoedro sea 2 unidades cúbicas.

SOLUCIONES

Solución nº 1:



a) $\overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(2+\lambda,\ -\lambda-2,\ 3)\cdot(1, -1, 0) = 0$

$2+\lambda+\lambda+2 = 0$

$\lambda = -2 \rightarrow S = (0, 2, 3)$

b) $\overrightarrow{PS} = (0, 0, 3)$

$\overrightarrow{PQ} = (2, -1, -1)$

$$\text{Área } PQS = \frac{\left|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}\right|}{2} = \frac{\left|(3, 6, 0)\right|}{2} = \frac{\sqrt{45}}{2} = 3{,}35 \text{ u}^2$$

Solución nº 2:

Buscamos los puntos de corte con los ejes:

Si $y = 0,\ z = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow A(2, 0, 0)$

Si $x = 0,\ z = 0 \rightarrow y = -4 \rightarrow B(0, -4, 0)$

Si $x = 0,\ y = 0 \rightarrow z = 4 \rightarrow C(0, 0, 4)$

El cuarto vértice del tetraedro es el punto $D(0, 0, 0)$.

$\overrightarrow{DA} = (2, 0, 0)$

$\overrightarrow{DB} = (0, -4, 0)$

$\overrightarrow{DC} = (0, 0, 4)$

$$\text{Volumen de } ABCD = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right]\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 32 = \frac{16}{3} \text{ u}^3$$

Solución nº 3:

a) Si $y = 0,\ z = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow A(2, 0, 0)$

Si $x = 0,\ z = 0 \rightarrow y = -4 \rightarrow B(0, -4, 0)$

Si $x = 0,\ y = 0 \rightarrow z = 4 \rightarrow C(0, 0, 4)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 0)$

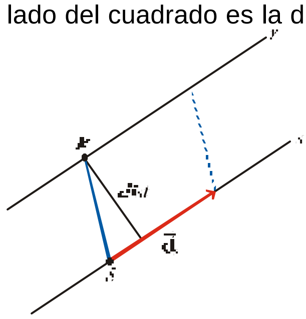
$\overrightarrow{AC} = (-2, 0\ 4)$

$$\text{Área } ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\left|(-16, 8, -8)\right|}{2} = \frac{\sqrt{384}}{2} = 9{,}8 \text{ u}^2$$

Solución nº 4:

$\vec{d}_r = (2, 1, -1)\ //\ \vec{d}_s(4, 2, -2)$. Por tanto las dos rectas son paralelas.

El lado del cuadrado es la distancia entre r y s.



$$dist\,(r\,,\,s) = dist\,(R,\,s) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{\left|\overrightarrow{RS} \times \vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_s\right|} = \frac{\left|(-4,\,-2,\,-10)\right|}{\sqrt{16+4+4}} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{24}} = \sqrt{5} = \text{arista del cubo}$$

Por tanto, $\text{Volumen} = \left(\sqrt{5}\right)^3 = 5\sqrt{5}\ \text{u}^3$

Solución nº 5:

a) La ecuación del plano es:
$1\cdot\ (x-3) + 1\cdot\ (y+1) + 1\cdot\ (z+1) = 0$, es decir:
$x + y + z - 1 = 0$

b) Obtenemos los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas:
– Con el eje $X \ \rightarrow\ y = z = 0 \ \rightarrow\ x = 1 \ \rightarrow$ Punto $A(1,\,0,\,0)$.
– Con el eje $Y \ \rightarrow\ x = z = 0 \ \rightarrow\ y = 1 \ \rightarrow$ Punto $B(0,\,1,\,0)$.
– Con el eje $Z \ \rightarrow\ x = y = 0 \ \rightarrow\ z = 1 \ \rightarrow$ Punto $C(0,\,0,\,1)$.
El cuarto vértice del tetraedro es el origen $D(0,\,0,\,0)$.
$\overrightarrow{DA}(1,0,0)\quad \overrightarrow{DB}(0,1,0)\quad \overrightarrow{DC}(0,0,1)$

$$\left[\vec{DA},\,\vec{DB},\,\vec{DC}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ \rightarrow\ \text{Volumen} = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}\ \text{u}^3$$

Solución nº 6:

a) Hay que probar que A, B y C no están alineados.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,\,-1,\,1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,\,2,\,-1) \end{array}\right\}$$

Sus coordenadas no son proporcionales, luego los puntos no están alineados y son los vértices de un triángulo.

b) $\text{Área } ABC = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \dfrac{\left|(-1,\,0,\,1)\right|}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71\ \text{u}^2$

Solución nº 7:

D es un punto de $r \ \rightarrow\ D(2-\lambda,\ \lambda,\ 1+\lambda)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot\left|\left[\vec{AB},\,\vec{AC},\,\vec{AD}\right]\right|$$

$\overrightarrow{AB} = (0,1,1)$

$\overrightarrow{AC} = (0,1,3)$

$\overrightarrow{AD} = (2-\lambda,\ \lambda-1,\ \lambda-1)$

$$\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2-\lambda & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 2 \ \rightarrow\ \left|4-2\lambda\right| = 12 \ \begin{cases} 4-2\lambda = 12 \ \rightarrow\ \lambda = -4 \\ 2\lambda - 4 = 12 \ \rightarrow\ \lambda = 8 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:
$D(6,\,-4,\,-3)$ y $D(-6,\,8,\,9)$.